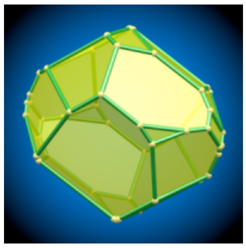
Quand les cubes deviennent ronds...

Guillaume Aubrun, Jos Leys

Quand les cubes deviennent ronds...

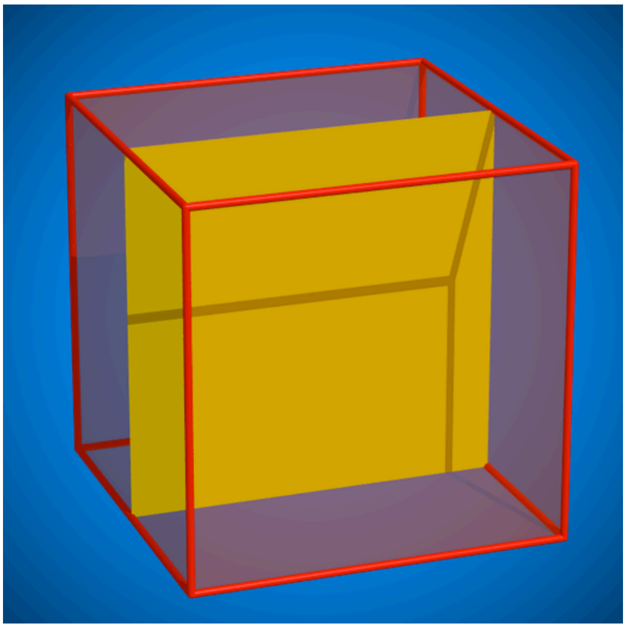


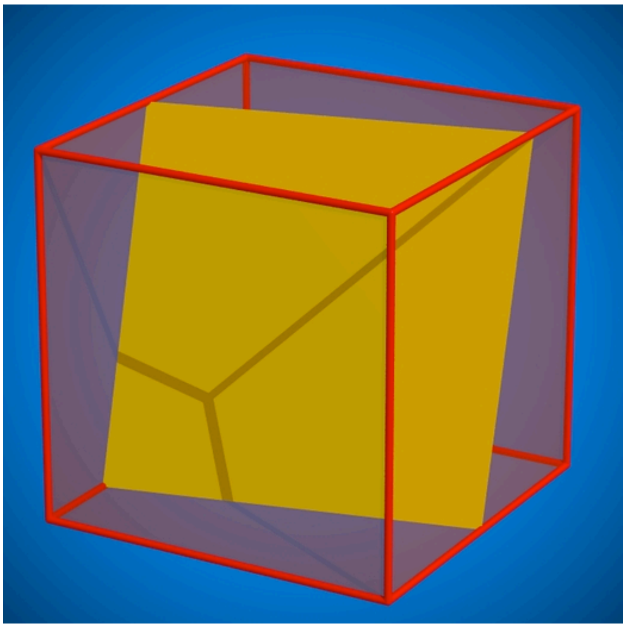
Le 22 juillet 2010, par **Guillaume Aubrun** et **Jos Leys**

Dvoretzky et les hypercubes à quelques milliers de dimensions ...

IMAGINEZ un cube, par exemple fait avec de la pâte à modeler, que vous coupez avec un couteau le long d'un plan. À quoi ressemble la coupe obtenue ?

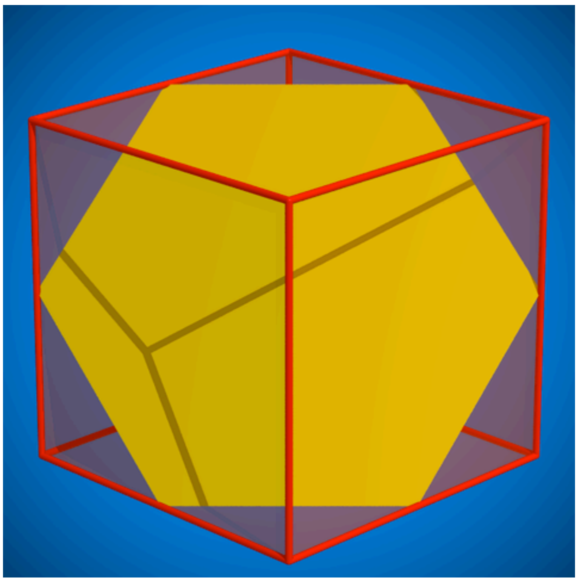
Si on choisit de couper selon un plan parallèle à une face, la section obtenue sera carrée. Un plan de coupe un peu oblique pourra donner par exemple un losange.





Petite devinette : est-il possible d'obtenir ainsi un hexagone régulier ? et un octogone ?

Réponses



Voici une image qui montre comment obtenir un hexagone régulier ! Le plan de coupe passe par les milieux de 6 arêtes du cube.

En revanche on ne peut pas obtenir d'octogone. En effet, on s'aperçoit en regardant les figures que la coupe obtenue est un polygone dont chaque côté provient d'une des faces du cube. Mais comme un cube n'a que 6 faces, il est impossible d'obtenir un polygone à plus de 6 côtés !

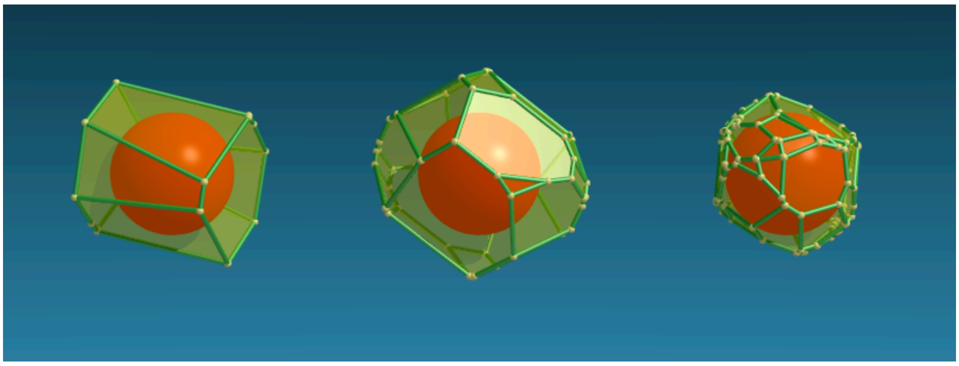
Les mathématiciens ne se limitent pas au cas des cubes à 3 dimensions dont on a l'habitude ; ils s'intéressent aussi à l'hypercube à 4, 5 ou même 100 dimensions. Il y a un hypercube dans chaque dimension : en dimension 2 c'est le carré, en dimension 3 c'est le cube usuel. En dimension supérieure, les hypercubes ne sont pas faciles à visualiser car notre esprit est limité à la vision en 3 dimensions.

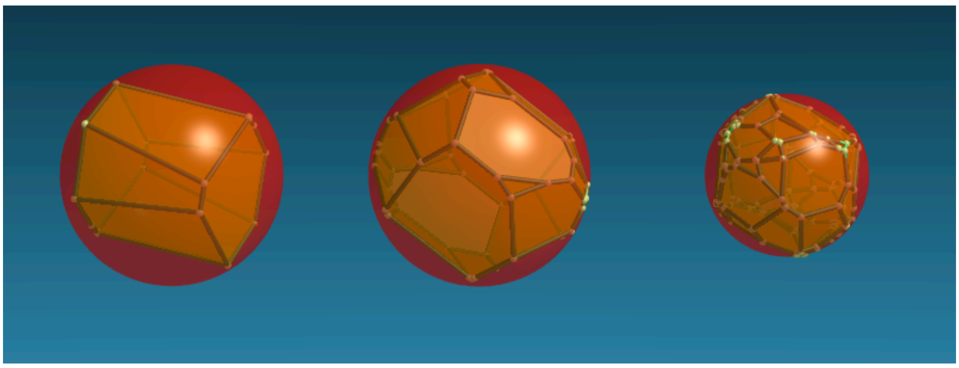
Néanmoins, exactement de la même manière que l'on pouvait couper le cube par un plan et observer un polygone (un objet à 2 dimensions), on peut couper l'hypercube par un « sous-espace de dimension 3 » et observer un polyèdre (un objet à 3 dimensions). [1] À quoi ressemble la coupe d'un hypercube de dimension 4, 5 ou même 100 ou 100 000 ?

Voici un film qui répond à cette question. Imaginons un hypercube de dimension 100 qui tourne sur lui-même et observons sa coupe à travers un sous-espace de dimension 3 qui, lui, ne bouge pas. Certains sommets apparaissent, d'autres disparaissent de manière assez complexe. Il n'est pas évident de dire à quoi l'objet obtenu ressemble...

C'est ici qu'intervient le théorème de Dvoretzky, un théorème fondamental pour la géométrie en très grande dimension. L'énoncé de ce théorème est le suivant : "*quand on coupe un hypercube de très grande dimension en faisant une coupe au hasard, ce qu'on observe est presque une sphère*". De plus, ce phénomène sera d'autant plus marqué que la dimension de l'hypercube est grande !

Ça veut dire quoi, qu'un objet est proche d'une sphère ? Dans le film ci-dessus, l'objet que l'on observe n'a pas vraiment l'air d'être sphérique... Nous dirons qu'un objet est presque sphérique si la sphère inscrite (la sphère tangente par l'intérieur) et la sphère circonscrite (la sphère tangente par l'extérieur) ont des rayons très proches. Voici des objets, d'abord avec sphères inscrites et puis avec sphères circonscrites.





Voici un film où l'on a tracé les sphères inscrite et circonscrite ; de plus on compare les sections de trois hypercubes de différentes dimensions. L'objet de gauche est la section d'un hypercube de dimension 10, celui du milieu de dimension 100 et celui de droite de dimension 500 000. On observe effectivement que plus la dimension est grande, plus l'objet obtenu est pris en sandwich entre deux sphères de rayons proches.

Le théorème de Dvoretzky ne se limite pas au cas des hypercubes. Le même phénomène sera vrai pour n'importe quel objet de grande dimension, pourvu qu'il soit convexe (c'est-à-dire que sa surface ne présente pas de creux [2]). Quand on le coupe au hasard, on observe quelque chose de presque rond.

Ce théorème a été démontré par Aryeh Dvoretzky en 1961, répondant à une conjecture d'Alexander Grothendieck. Une autre preuve a été donnée ensuite par Vitali Milman a l'aide du concept de « concentration de la mesure » qui a révolutionné la manière dont les mathématiciens appréhendent les objets de grande dimension. L'idée est la suivante : quand on observe une toute petite partie d'un objet complexe de très grande dimension, on a l'impression qu'il est simple. C'est le cas ici : observer l'hypercube (un objet « complexe ») à travers seulement 3 dimensions donne l'impression de voir une sphère (un objet « simple ») !

Notes

[▲1] Pour des exemples de coupes d'objets à quatre dimensions, regardez le film **Dimensions**.

[▲2] Davantage sur la notion de convexité dans cet **article**.

Crédits images

Pour citer cet article : **Guillaume Aubrun** et **Jos Leys**, **Quand les cubes deviennent ronds...** . *Images des Mathématiques*, CNRS, 2010. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Quand-les-cubes-deviennent-ronds.html`